令和４年度 学力検査問題 数学 解答

$\boxed{1}$ $3a_{n+2}-4a_{n+1}+a_n=4n+2 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ldots\ldots)\ \cdots\cdots$ ①

(1) ① より

$$\begin{aligned}&(3a_{n+2}-a_{n+1})-(3a_{n+1}-a_n)=4n+2\\ \Leftrightarrow\quad &b_{n+1}-b_n=4n+2 \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ldots\ldots)\end{aligned}$$

また，$b_1=3a_2-a_1=3\cdot 1-3=0.$ よって，$n\geqq 2$ のとき，

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}(4k+2)=0+4\sum_{k=1}^{n-1}k+\sum_{k=1}^{n-1}2=4\cdot\frac{1}{2}(n-1)\cdot n+2(n-1)=2n^2-2$$

これは，$n=1$ のときにも成立する。したがって，数列 $\{b_n\}$ の一般項は $\boldsymbol{b_n=2n^2-2}$

(2) ① より

$$\begin{aligned}&3\left(a_{n+2}-a_{n+1}\right)-\left(a_{n+1}-a_n\right)=4n+2\\ \Leftrightarrow\quad &3\left\{a_{n+2}-a_{n+1}-2(n+1)\right\}-\left\{a_{n+1}-a_n-2n\right\}=-4\\ \Leftrightarrow\quad &3c_{n+1}-c_n=-4\\ \Leftrightarrow\quad &3\left(c_{n+1}+2\right)-\left(c_n+2\right)=0\\ \Leftrightarrow\quad &c_{n+1}+2=\frac{1}{3}\left(c_n+2\right) \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ldots\ldots)\end{aligned}$$

また，$c_1=a_2-a_1-2\cdot 1=1-3-2=-4.$ よって，$n\geqq 1$ において

$$c_n+2=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(c_1+2)=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(-4+2)$$

したがって，数列 $\{c_n\}$ の一般項は $\boldsymbol{c_n=-2-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}}$

(3) (1) より，$n\geqq 1$ において $3a_{n+1}-a_n=2n^2-2\ \cdots\cdots$ ②
また，(2) より，$n\geqq 1$ において

$$a_{n+1}-a_n-2n=-2-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \quad\Leftrightarrow\quad a_{n+1}-a_n=2n-2-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\ \cdots\cdots③$$

② − ③ × 3 より，$n\geqq 1$ において

$$2a_n=\left(2n^2-2\right)-3\left\{2n-2-2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right\}=2n^2-6n+4+2\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$$

したがって，数列 $\{a_n\}$ の一般項は $\boldsymbol{a_n=n^2-3n+2+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}}$

(4)
$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\left\{(k-1)(k-2)+\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}\right\}\\ &=\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{1}{3}k(k-1)(k-2)-\frac{1}{3}(k-1)(k-2)(k-3)\right\}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-2}\\ &=\frac{1}{3}n(n-1)(n-2)+\frac{3\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{3}}=\boldsymbol{\frac{1}{3}n(n-1)(n-2)+\frac{9}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}\end{aligned}$$

$\boxed{\mathbf{2}}$

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ より $1 \leqq 2^x \leqq 2$,　$-\dfrac{\pi}{4} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{4}$ より $-1 \leqq \tan y \leqq 1$ なので,

$X = 2^x \tan y$ のとりうる値の範囲は $2 \cdot (-1) \leqq X \leqq 2 \cdot 1 \iff \boldsymbol{-2 \leqq X \leqq 2}$

また,$-\dfrac{\pi}{4} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{4}$ より $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq \cos y \leqq 1$ なので,$\dfrac{1}{2} \leqq \cos^2 y \leqq 1 \iff 1 \leqq \dfrac{1}{\cos^2 y} \leqq 2$

したがって,$Y = 2^x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 y}$ のとりうる値の範囲は $1 \cdot 1 \leqq Y \leqq 2 \cdot 2 \iff \boldsymbol{1 \leqq Y \leqq 4}$

(2)「$x = 0$ かつ $-\dfrac{\pi}{4} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{4}$」のとき「$X = \tan y,\ Y = \dfrac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y \quad \left(-\dfrac{\pi}{4} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$」

なので,点 $(X,\ Y)$ の動く部分は「$-1 \leqq X \leqq 1$ かつ $Y = 1 + X^2$」である。

したがって,点 $(X,\ Y)$ の軌跡は　$\boldsymbol{Y = X^2 + 1 \quad (-1 \leqq X \leqq 1)}$

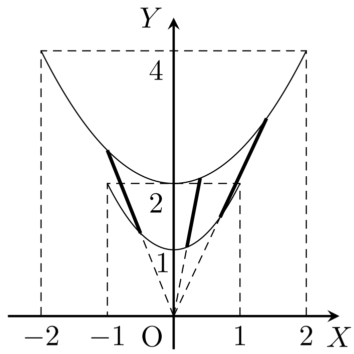
「$x = 1$ かつ $-\dfrac{\pi}{4} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{4}$」のとき

「$X = 2\tan y,\ Y = \dfrac{2}{\cos^2 y} = 2\left(1 + \tan^2 y\right) = 2 + \dfrac{1}{2}(2\tan y)^2 \quad \left(-\dfrac{\pi}{4} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$」

なので,点 $(X,\ Y)$ の動く部分は「$-2 \leqq X \leqq 2$ かつ $Y = 2 + \dfrac{1}{2}X^2$」である。

したがって,点 $(X,\ Y)$ の軌跡は　$\boldsymbol{Y = \dfrac{1}{2}X^2 + 2 \quad (-2 \leqq X \leqq 2)}$

(3) <解 1>



点 $\left(2^x \tan y,\ \dfrac{2^x}{\cos^2 y}\right)$ は,点 $\left(\tan y,\ \dfrac{1}{\cos^2 y}\right)$ を,原点を中心にして 2^x 倍に拡大して得られる点である。ここで,$0 \leqq x \leqq 1$ のとき $1 \leqq 2^x \leqq 2$ なので,y を固定して x を $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で動かすとき,点 $(X,\ Y)$ の軌跡は,2 点 $\left(\tan y,\ \dfrac{1}{\cos^2 y}\right)$, $\left(2\tan y,\ \dfrac{2}{\cos^2 y}\right)$ を端点とする線分である。この線分は,$X = \tan y \cdot \cos^2 y \cdot Y \quad \left(\dfrac{1}{\cos^2 y} \leqq Y \leqq \dfrac{2}{\cos^2 y}\right)$ ……①

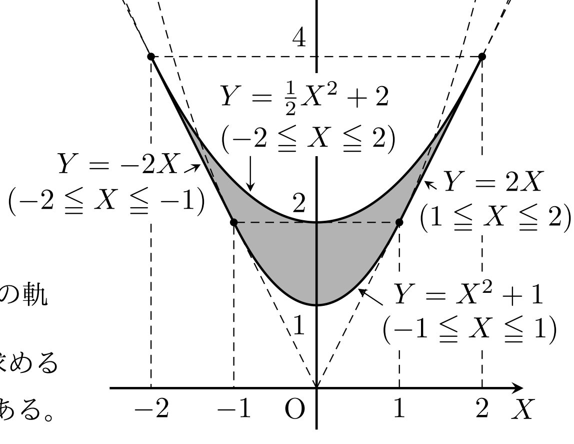
と表される。このとき,求める領域は,y を $-\dfrac{\pi}{4} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{4}$ の範囲で動かしたときの,線分①の通過部分である。

ここで,線分①の傾き(の逆数)について,

$\tan y \cdot \cos^2 y = \sin y \cos y = \dfrac{1}{2}\sin 2y$ は

$-\dfrac{\pi}{4} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{4}$ で単調増加であり,とりうる値の範囲は $-\dfrac{1}{2} \leqq \dfrac{1}{2}\sin 2y \leqq \dfrac{1}{2}$ である。

また,$-\dfrac{\pi}{4} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{4}$ のとき,①の端点 $\left(\tan y,\ \dfrac{1}{\cos^2 y}\right)$ および $\left(2\tan y,\ \dfrac{2}{\cos^2 y}\right)$ の軌跡は,(2) で求めた図形である。以上より,求める領域は右図の色付き部分(境界線を含む)である。



$\boxed{\mathbf{2}}$ （前ページの続き）

(3) ＜解 2＞

まず，x を固定して，y を $-\dfrac{\pi}{4} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{4}$ の範囲で動かしたときの，点 $(X,\ Y)$ の軌跡を求める。

「$X = 2^x \tan y,\ Y = \dfrac{2^x}{\cos^2 y} = 2^x\left(1+\tan^2 y\right) = 2^x + \dfrac{1}{2^x}\left(2^x \tan y\right)^2 \quad \left(-\dfrac{\pi}{4} \leqq y \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$」

なので，x を固定するごとに，点 $(X,\ Y)$ の軌跡は，「$Y = \dfrac{1}{2^x}X^2 + 2^x \quad (-2^x \leqq X \leqq 2^x)$」である。さらに $2^x = t$ とおくと，t のとりうる値の範囲は $1 \leqq t \leqq 2$ であり，点 $(X,\ Y)$ の軌跡は「$Y = \dfrac{1}{t}X^2 + t \quad (-t \leqq X \leqq t)$」$\cdots\cdots$ ② と表される。したがって，t が $1 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動いたときの，曲線②の通過領域を求めればよい。

以下，k を実数として，求める通過領域の $X = k$ での切り口を考える。そのために，実数の定数 k に対して，$f(t) = \dfrac{k^2}{t} + t$ を考える。

このとき $f'(t) = -\dfrac{k^2}{t^2} + 1$ なので，$f(t)$ の $t > 0$ における増減表は，$k \neq 0$ のとき右のようになる。

t	0	$\cdots$	$\lvert k\rvert$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		$\searrow$	$2\lvert k\rvert$	$\nearrow$

[I] **$k = 0$ のとき**　曲線②と $X = 0$ は，点 $(0, t)$ で交わる。$1 \leqq t \leqq 2$ なので，求める通過領域の $X = 0$ による切り口の Y 座標のとりうる値の範囲は，$1 \leqq Y \leqq 2$.

[II] **$0 < |k| \leqq 1$ のとき**　曲線②と $X = k$ は，$1 \leqq t \leqq 2$ において必ず共有点をもち，その共有点の Y 座標は $\dfrac{k^2}{t} + t = f(t)$ である。よって，求める通過領域の $X = k$ による切り口の Y 座標のとりうる値の範囲は，$f(t)$ $(1 \leqq t \leqq 2)$ のとりうる値の範囲に一致する。ここで，$|k| \leqq 1 < 2$ なので，$f(t)$ は $1 \leqq t \leqq 2$ において単調増加である。したがって，求める通過領域の $X = k$ による切り口の Y 座標のとりうる値の範囲は，

$$f(1) \leqq Y \leqq f(2) \quad \Leftrightarrow \quad k^2 + 1 \leqq Y \leqq \frac{1}{2}k^2 + 2$$

[III] **$1 < |k| \leqq 2$ のとき**　$1 \leqq t \leqq 2$ において，曲線②と $X = k$ が共有点をもつための t の条件は，$|k| \leqq t \leqq 2$ である。また，$|k| \leqq t \leqq 2$ のとき，曲線②と $X = k$ の共有点の Y 座標は $\dfrac{k^2}{t} + t = f(t)$ である。よって，求める通過領域の $X = k$ による切り口の Y 座標のとりうる値の範囲は，$f(t)$ $(|k| \leqq t \leqq 2)$ のとりうる値の範囲に一致する。$f(t)$ は $|k| \leqq t \leqq 2$ において単調増加なので，求める通過領域の $X = k$ による切り口の Y 座標のとりうる値の範囲は，

$$f(|k|) \leqq Y \leqq f(2) \quad \Leftrightarrow \quad 2|k| \leqq Y \leqq \frac{1}{2}k^2 + 2$$

[IV] **$|k| > 2$ のとき**　$1 \leqq t \leqq 2$ において，曲線②と $X = k$ は共有点をもたない。したがって，求める通過領域は，$X = k$ と共有点をもたない。

以上より，求める通過領域は，

「$|X| \leqq 1$ かつ $X^2 + 1 \leqq Y \leqq \dfrac{1}{2}X^2 + 2$」と「$1 < |X| \leqq 2$ かつ $2|X| \leqq Y \leqq \dfrac{1}{2}X^2 + 2$」

を合わせた部分となる。（図は，前ページを参照せよ。）

$\boxed{\mathbf{2}}$ （前ページの続き）

(3) ＜解３＞

求める領域は，t が $1 \leqq t \leqq 2$ の範囲を動いたときの，曲線

$$Y=\frac{1}{t}X^2+t \quad (-t \leqq X \leqq t) \ \cdots\cdots②$$

の通過領域である。（ここまでは，＜解２＞に同じ）

ここで，$-t \leqq X \leqq t \iff |X| \leqq t$ であり，$Y=\dfrac{1}{t}X^2+t \iff t^2-Yt+X^2=0$ である。よって，$g(t)=t^2-Yt+X^2$ とおくとき，点 $(X,\ Y)$ が求める領域に属するための条件は，

「t についての方程式 $g(t)=0$ が,『$1 \leqq t \leqq 2$ かつ $|X| \leqq t$』の範囲に解をもつ」$\cdots$ $(*)$

ことである。

[I] $\boldsymbol{|X| \leqq 1}$ **のとき** $(*) \iff$「$g(t)=0$ が $1 \leqq t \leqq 2$ に解をもつ」 となる。

このようになるための条件は，

(i) $g(1)g(2) \leqq 0$

(ii) $g(1)>0$ かつ $g(2)>0$ かつ $1<\dfrac{Y}{2}<2$ かつ $g\left(\frac{Y}{2}\right) \leqq 0$

のうちいずれか一方が成り立つことである。ここで，

$$\begin{aligned} g(1)g(2) \leqq 0 &\iff \left(1-Y+X^2\right)\left(4-2Y+X^2\right) \leqq 0 \\ &\iff \left\{Y-\left(X^2+1\right)\right\}\left\{Y-\left(\frac{1}{2}X^2+2\right)\right\} \leqq 0 \ \cdots\cdots③ \end{aligned}$$

だが，$|X| \leqq 1$ において $\left(\dfrac{1}{2}X^2+2\right)-\left(X^2+1\right)=1-\dfrac{1}{2}X^2 \geqq 1-\dfrac{1}{2}>0$ なので，

$$③ \iff X^2+1 \leqq Y \leqq \frac{1}{2}X^2+2$$

一方，(ii) において「$g(1)>0 \iff Y<X^2+1$」だが，$|X| \leqq 1$ のとき $X^2+1 \leqq 2$ なので，$g(1)>0$（このとき $Y<2$）と $1<\dfrac{Y}{2}<2$ が同時に成り立つことはない。

以上より，$|X| \leqq 1$ のとき，点 $(X,\ Y)$ が求める領域に属するための条件は，

$$X^2+1 \leqq Y \leqq \frac{1}{2}X^2+2$$

である。

[II] $\boldsymbol{1<|X| \leqq 2}$ **のとき** $(*) \iff$「$g(t)=0$ が $|X| \leqq t \leqq 2$ に解をもつ」 となる。

このようになるための条件は，

(iii) $g\left(|X|\right)g(2) \leqq 0$

(iv) $g\left(|X|\right)>0$ かつ $g(2)>0$ かつ $|X|<\dfrac{Y}{2}<2$ かつ $g\left(\frac{Y}{2}\right) \leqq 0$

のうちいずれか一方が成り立つことである。ここで，

$$\begin{aligned} g\left(|X|\right)g(2) \leqq 0 &\iff \left(|X|^2-Y|X|+X^2\right)\left(4-2Y+X^2\right) \leqq 0 \\ &\iff \left\{Y-2|X|\right\}\left\{Y-\left(\frac{1}{2}X^2+2\right)\right\} \leqq 0 \ \cdots\cdots④ \end{aligned}$$

だが，$\left(\dfrac{1}{2}X^2+2\right)-2|X|=\dfrac{1}{2}\left(|X|-2\right)^2 \geqq 0$ なので，

$$④ \iff 2|X| \leqq Y \leqq \frac{1}{2}X^2+2$$

$\boxed{\mathbf{2}}$ （前ページの続き）

(3)（<解 3 >の続き）

[II]（「$\boldsymbol{1 < |X| \leqq 2}$ **のとき**」の続き）

一方，(iv) において

$$g\,(|X|) > 0 \iff |X|^2 - Y|X| + X^2 > 0$$
$$\iff |X|\,(2|X| - Y) > 0 \iff Y < 2|X| \iff \frac{Y}{2} < |X|$$

なので，$g\,(|X|) > 0$ と $|X| < \dfrac{Y}{2} < 2$ が同時に成り立つことはない。

以上より，$1 < |X| \leqq 2$ のとき，点 $(X,\ Y)$ が求める領域に属するための条件は，

$$2|X| \leqq Y \leqq \frac{1}{2}X^2 + 2$$

である。

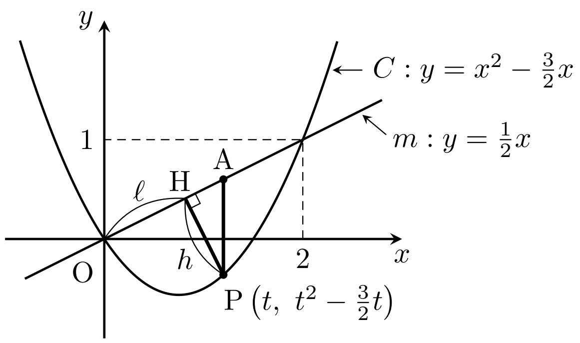
[III] $\boldsymbol{|X| > 2}$ **のとき**　『$1 \leqq t \leqq 2$ かつ $|X| \leqq t$』となる t は存在しないので，条件 $(*)$ を満たす $(X,\ Y)$ は存在しない。

以上より，求める領域は，

「$|X| \leqq 1$ かつ $X^2 + 1 \leqq Y \leqq \dfrac{1}{2}X^2 + 2$」と「$1 < |X| \leqq 2$ かつ $2|X| \leqq Y \leqq \dfrac{1}{2}X^2 + 2$」

を合わせた部分となる。（図は，2 ページを参照せよ。）

$\boxed{\mathbf{3}}$



(1) $\dfrac{1}{2}x = x^2 - \dfrac{3}{2}x \quad \Leftrightarrow \quad x(x-2) = 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \Leftrightarrow \quad x = 0,\ 2$

よって，直線 m と放物線 C の交点は，
$\mathrm{O}(0,0)$ と $(2,1)$ の 2 点である。
したがって，領域 R の面積は

$$\int_0^2 \left\{\frac{1}{2}x - \left(x^2 - \frac{3}{2}x\right)\right\} dx = \int_0^2 \left(2x - x^2\right) dx = \left[x^2 - \frac{1}{3}x^3\right]_0^2 = 2^2 - \frac{2^3}{3} = \boldsymbol{\frac{4}{3}}$$

(2) 点 $\mathrm{P}\left(t,\ t^2 - \frac{3}{2}t\right)$ を通り y 軸に平行な直線と，直線 m との交点を A とすると，$\mathrm{A}(t,\ \frac{1}{2}t)$ である。このとき，$\triangle\mathrm{PAH}$ は $\mathrm{PA} : \mathrm{AH} : \mathrm{HP} = \sqrt{5} : 1 : 2$ の直角三角形なので，

$$h = \mathrm{PH} = \frac{2}{\sqrt{5}}\mathrm{PA} = \frac{2}{\sqrt{5}}\left|\frac{1}{2}t - \left(t^2 - \frac{3}{2}t\right)\right| = \frac{2}{\sqrt{5}}\left|2t - t^2\right| = \boldsymbol{\frac{2}{\sqrt{5}}t\,|2-t|}$$

また，$\ell = \mathrm{OH} = \begin{cases} \mathrm{OA} - \mathrm{AH} & (0 \leqq t \leqq 2 \text{ のとき}) \\ \mathrm{OA} + \mathrm{AH} & (t \geqq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$, $\quad \mathrm{OA} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}t$,

$$\mathrm{AH} = \frac{1}{2}\mathrm{PH} = \frac{t\,|2-t|}{\sqrt{5}} = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{5}}t\,(2-t) & (0 \leqq t \leqq 2 \text{ のとき}) \\ -\frac{1}{\sqrt{5}}t\,(2-t) & (t \geqq 2 \text{ のとき}) \end{cases}$$

なので，$0 \leqq t \leqq 2$ の場合，$t \geqq 2$ の場合のいずれにおいても，

$$\ell = \frac{\sqrt{5}}{2}t - \frac{1}{\sqrt{5}}t\,(2-t) = \boldsymbol{\frac{1}{2\sqrt{5}}\left(2t^2 + t\right)}$$

(3) $t = 2$ のとき $\ell = \sqrt{5}$ なので，求める体積は $V = \displaystyle\int_0^{\sqrt{5}} \pi h^2\,d\ell$ と表される。ここで，

$\ell = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}\left(2t^2 + t\right)$ と置換すると，$d\ell = \dfrac{1}{2\sqrt{5}}(4t+1)\,dt$ であり，$\begin{array}{c|ccc} \ell & 0 & \to & \sqrt{5} \\ \hline t & 0 & \to & 2 \end{array}$ なので，

$$\begin{aligned} V &= \int_0^2 \pi \left\{\frac{2}{\sqrt{5}}t\,|2-t|\right\}^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{5}}(4t+1)\,dt \\ &= \frac{2\pi}{5\sqrt{5}}\int_0^2 \left(t^4 - 4t^3 + 4t^2\right)(4t+1)\,dt \\ &= \frac{2\pi}{5\sqrt{5}}\int_0^2 \left(4t^5 - 15t^4 + 12t^3 + 4t^2\right) dt \\ &= \frac{2\pi}{5\sqrt{5}}\left[\frac{2}{3}t^6 - 3t^5 + 3t^4 + \frac{4}{3}t^3\right]_0^2 \\ &= \frac{2\pi}{5\sqrt{5}}\left\{\frac{2}{3}\cdot 2^6 - 3\cdot 2^5 + 3\cdot 2^4 + \frac{4}{3}\cdot 2^3\right\} \\ &= \frac{2^5\pi}{5\sqrt{5}}\left\{\frac{8}{3} - 6 + 3 + \frac{2}{3}\right\} = \frac{32\pi}{15\sqrt{5}} = \boldsymbol{\frac{32\sqrt{5}\pi}{75}} \end{aligned}$$

4

集団 U において，病原菌 X に感染している事象を X とし，検査方法 A, B, C で陽性判定が得られる事象を順に A, B, C とする。このとき，与えられた条件から，

$$P(X)=\frac{2}{15},\quad P_X(\overline{A})=P_{\overline{X}}(A)=\frac{1}{14},\quad P_X(\overline{B})=P_{\overline{X}}(B)=\frac{1}{27},\quad P_X(\overline{C})=P_{\overline{X}}(C)=\frac{1}{40}$$

である。

(1) $P(X\cap A)=P(X)P_X(A)=\frac{2}{15}\cdot\frac{13}{14}$，$P(\overline{X}\cap A)=P(\overline{X})P_{\overline{X}}(A)=\frac{13}{15}\cdot\frac{1}{14}$ なので，求める確率は，$P_A(X)=\dfrac{P(A\cap X)}{P(A)}=\dfrac{P(X\cap A)}{P(X\cap A)+P(\overline{X}\cap A)}=\dfrac{\frac{2}{15}\cdot\frac{13}{14}}{\frac{2}{15}\cdot\frac{13}{14}+\frac{13}{15}\cdot\frac{1}{14}}=\dfrac{2}{2+1}=\boldsymbol{\dfrac{2}{3}}$

(2) (1) と同様に考えて，求める確率は

$$\begin{aligned}
P_{A\cap B\cap\overline{C}}(X)&=\frac{P\left((A\cap B\cap\overline{C})\cap X\right)}{P(A\cap B\cap\overline{C})}=\frac{P\left(X\cap(A\cap B\cap\overline{C})\right)}{P\left(X\cap(A\cap B\cap\overline{C})\right)+P\left(\overline{X}\cap(A\cap B\cap\overline{C})\right)}\\
&=\frac{P(X)P_X(A\cap B\cap\overline{C})}{P(X)P_X(A\cap B\cap\overline{C})+P(\overline{X})P_{\overline{X}}(A\cap B\cap\overline{C})}\\
&=\frac{\frac{2}{15}\cdot\left(\frac{13}{14}\cdot\frac{26}{27}\cdot\frac{1}{40}\right)}{\frac{2}{15}\cdot\left(\frac{13}{14}\cdot\frac{26}{27}\cdot\frac{1}{40}\right)+\frac{13}{15}\cdot\left(\frac{1}{14}\cdot\frac{1}{27}\cdot\frac{39}{40}\right)}=\frac{2\cdot1\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot2\cdot1+1\cdot1\cdot1\cdot3}=\boldsymbol{\frac{4}{7}}
\end{aligned}$$

(3) $D=\left(A\cap B\cap\overline{C}\right)\cup\left(A\cap\overline{B}\cap C\right)\cup\left(\overline{A}\cap B\cap C\right)$ とおく。このとき，$P_D(X)$ および $P_D\left((X\cap A)\cup(\overline{X}\cap\overline{A})\right)$ を求めればよい。ここで，

$$\begin{aligned}
&D_1=X\cap(A\cap B\cap\overline{C}),\quad D_2=X\cap(A\cap\overline{B}\cap C),\quad D_3=X\cap(\overline{A}\cap B\cap C)\\
&D_4=\overline{X}\cap(A\cap B\cap\overline{C}),\quad D_5=\overline{X}\cap(A\cap\overline{B}\cap C),\quad D_6=\overline{X}\cap(\overline{A}\cap B\cap C)
\end{aligned}$$

とおく。このとき，D_1，D_2，$\ldots$，D_6 の 6 つは排反で，$D=D_1\cup D_2\cup\cdots\cup D_6$ である。また，

$$\begin{aligned}
P(D_1)&=\frac{2}{15}\cdot\left(\frac{13}{14}\cdot\frac{26}{27}\cdot\frac{1}{40}\right),\quad P(D_4)=\frac{13}{15}\cdot\left(\frac{1}{14}\cdot\frac{1}{27}\cdot\frac{39}{40}\right)\\
P(D_2)&=\frac{2}{15}\cdot\left(\frac{13}{14}\cdot\frac{1}{27}\cdot\frac{39}{40}\right),\quad P(D_5)=\frac{13}{15}\cdot\left(\frac{1}{14}\cdot\frac{26}{27}\cdot\frac{1}{40}\right)\\
P(D_3)&=\frac{2}{15}\cdot\left(\frac{1}{14}\cdot\frac{26}{27}\cdot\frac{39}{40}\right),\quad P(D_6)=\frac{13}{15}\cdot\left(\frac{13}{14}\cdot\frac{1}{27}\cdot\frac{1}{40}\right)
\end{aligned}$$

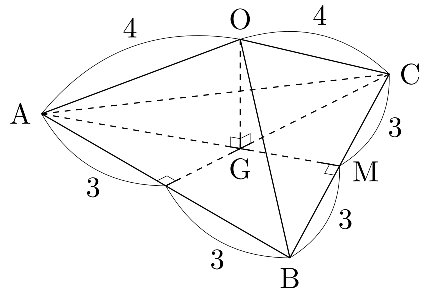
なので，これら 6 つの値の比は $P(D_1):P(D_2):\cdots:P(D_6)=4:6:12:3:2:1$ である。$D\cap X=D_1\cup D_2\cup D_3$ なので，条件 D のもとで，K が X に感染している確率は

$$P_D(X)=\frac{P(D\cap X)}{P(D)}=\frac{P(D_1)+P(D_2)+P(D_3)}{P(D_1)+P(D_2)+\cdots+P(D_6)}=\frac{4+6+12}{4+6+12+3+2+1}=\boldsymbol{\frac{11}{14}}$$

また，$D\cap\left((X\cap A)\cup(\overline{X}\cap\overline{A})\right)=D_1\cup D_2\cup D_6$ なので，条件 D のもとで，A による判定結果が正しかった確率は

$$\begin{aligned}
P_D\left((X\cap A)\cup(\overline{X}\cap\overline{A})\right)&=\frac{P\left(D\cap\left((X\cap A)\cup(\overline{X}\cap\overline{A})\right)\right)}{P(D)}\\
&=\frac{P(D_1)+P(D_2)+P(D_6)}{P(D_1)+P(D_2)+\cdots+P(D_6)}=\frac{4+6+1}{4+6+12+3+2+1}=\boldsymbol{\frac{11}{28}}
\end{aligned}$$

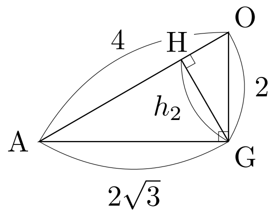
5



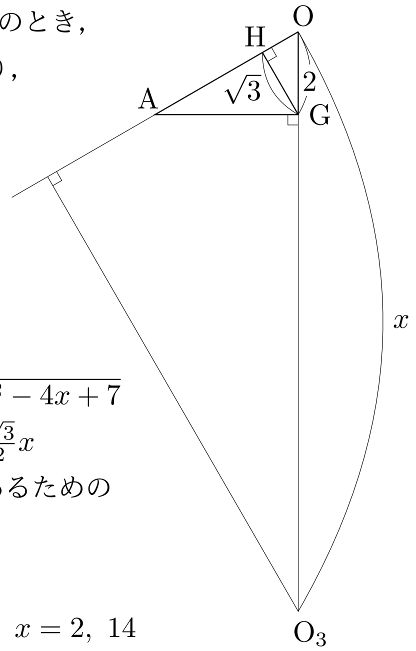
(1) 辺 BC の中点を M とする。このとき，
AB $=$ AC より AM $\perp$ BC なので，
$\mathrm{AM} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 - \mathrm{BM}^2} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$
ここで，G は三角形 ABC の重心なので，
線分 AM を $2:1$ に内分する点である。
よって，$\mathrm{AG} = 2\sqrt{3}$, $\mathrm{GM} = \sqrt{3}$ である。
$\triangle$ABC は正三角形なので，同様にして $\mathrm{BG} = \mathrm{CG} = 2\sqrt{3}$ も成立する。
OG $\perp$ 平面 ABC より OG $\perp$ AG なので，

$$h_1 = \mathrm{OG} = \sqrt{\mathrm{OA}^2 - \mathrm{AG}^2} = \sqrt{4^2 - (2\sqrt{3})^2} = \mathbf{2}$$

球 S_1 の中心を O_1 とする。このとき，O_1 は半直線 OG 上にあり，$\mathrm{O}_1\mathrm{O} = r_1$ である。
よって，$\mathrm{OG} = 2$ より，$\mathrm{O}_1\mathrm{G} = |r_1 - 2|$ である。
また，直線 OG $\perp$ 平面 ABC より $\mathrm{O}_1\mathrm{G} \perp \mathrm{AG}$, $\mathrm{O}_1\mathrm{G} \perp \mathrm{BG}$, $\mathrm{O}_1\mathrm{G} \perp \mathrm{CG}$ なので，
$\mathrm{O}_1\mathrm{A}^2 = \mathrm{O}_1\mathrm{B}^2 = \mathrm{O}_1\mathrm{C}^2 = \mathrm{O}_1\mathrm{G}^2 + (2\sqrt{3})^2 = |r_1 - 2|^2 + 12 = (r_1 - 2)^2 + 12 = r_1^2 - 4r_1 + 16$
よって，$\mathrm{O}_1\mathrm{O} = \mathrm{O}_1\mathrm{A} = \mathrm{O}_1\mathrm{B} = \mathrm{O}_1\mathrm{C}$ となるための条件は，$r_1^2 - 4r_1 + 16 = r_1^2 \iff \boldsymbol{r_1 = 4}$



(2) 右図において $\triangle$OAG と $\triangle$OGH は相似なので，
$\mathrm{OA} : \mathrm{AG} = \mathrm{OG} : \mathrm{GH} \iff 4 : 2\sqrt{3} = 2 : h_2 \iff \boldsymbol{h_2 = \sqrt{3}}$
以上より $\mathrm{GM} = \mathrm{GH} = \sqrt{3}$ となるので，G を中心とする
半径 $\sqrt{3}$ の球は，線分 BC, および線分 OA の両方に接する。
よって，図形の対称性から，G を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の球は，
6 つの線分 AB，BC，CA，OA，OB，OC 全てに接する。
したがって，この球が S_2 であり，$\boldsymbol{r_2 = \sqrt{3}}$.



(3) 半直線 OG 上の点 O_3 について，$\mathrm{OO}_3 = x$ とする。このとき，
$\mathrm{O}_3\mathrm{G} \perp$ 平面 ABC，GM $\perp$ BC より $\mathrm{O}_3\mathrm{M} \perp \mathrm{BC}$ であり，
$\mathrm{O}_3\mathrm{G} \perp \mathrm{GM}$ より

$$\begin{aligned}\mathrm{O}_3\mathrm{M}^2 &= \mathrm{O}_3\mathrm{G}^2 + \mathrm{GM}^2 \\ &= (x-2)^2 + (\sqrt{3})^2 = x^2 - 4x + 7\end{aligned}$$

一方，O_3 から半直線 OA に下ろした垂線の長さは，
右図より $x \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$ である。以上より，
図形の対称性も考慮すると，O_3 を中心とする球が

- 線分 AB，BC，CA に接するとき，その半径は $\sqrt{x^2 - 4x + 7}$
- 半直線 OA，OB，OC に接するとき，その半径は $\frac{\sqrt{3}}{2}x$

である。よって，点 O_3 が球 S_2 または球 S_3 の中心であるための
条件は，（条件 $x > 0$ のもとで）

$$\sqrt{x^2 - 4x + 7} = \frac{\sqrt{3}}{2}x \iff x^2 - 4x + 7 = \frac{3}{4}x^2$$
$$\iff x^2 - 16x + 28 = 0 \iff (x-2)(x-14) = 0 \iff x = 2,\ 14$$

である。ここで，(2) より，$x = 2$ のときの O_3（すなわち，$\mathrm{O}_3 = \mathrm{G}$）
が球 S_2 の中心だったので，$x = 14$ のときの O_3 が球 S_3 の中心である。
このとき，$r_3 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \cdot 14 = \boldsymbol{7\sqrt{3}}$